ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'ARTS ET METIERS

MATHÉMATIQUES 1982

(Options T et TA)

Épreuve n° 1 (exercices) (4 h)

Les divers exercices sont indépendants.

Les candidats sont invités à soigner la présentation, à donner de leurs affirmations des justifications complètes et autant que possible non surabondantes, à respecter les notations de l'énoncé.

PREMIER EXERCICE

Soit P un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points A = (1,1), B = (1,0), la droite D, d'équation $x - 1 = 0$ et le cercle C de diamètre OA.

On désigne par T l'application de D dans P définie de la façon suivante : pour $M \in D$, soit Q le point où la droite OM recoupe C (on convient de prendre Q = O si OM ne recoupe pas C), T (M) est alors le point M′ tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{QM}$

1° Y a-t-il des points M de D tels que T(M) = M?

T est-elle injective?

2° Soit Γ = T(D). Déterminer une représentation paramétrique de Γ. On prendra pour paramètre l'ordonnée t de M.

3° Déterminer l'équation de Γ en coordonnées polaires (axe de référence : $O, \vec{i}$). Déterminer l'équation cartésienne de Γ.

4° Étudier la branche infinie de Γ. Préciser les tangentes au point double. Tracer Γ.

DEUXIÈME EXERCICE

Dans un espace euclidien réel de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on désigne par E la surface d'équation :

$$4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16a^2$$

a étant une constante > 0 donnée.

1° Soit M = (x, y, z) un point de E. Déterminer un vecteur normal en M à E. Écrire l'équation du plan tangent en M à E.

2° Soit Γ l'ensemble des points M de E tels que le plan tangent en M à E contienne le point A = $(0, 4a, 4a)$.

a. Montrer que Γ est une courbe plane et donner une équation de son plan.

b. Former l'équation de la projection orthogonale de Γ sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3° Soit L la courbe intersection de E et du plan d'équation $z = 2a\sqrt{2}$.

On désigne par S l'ensemble des points des normales à E aux points de L.

a. Déterminer une représentation paramétrique de L.

b. Déterminer une représentation paramétrique de S.

4° Déterminer et construire l'intersection U de S et du plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

TROISIÈME EXERCICE

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1° Déterminer le polynôme caractéristique de A. Calculer ses valeurs propres.

2° Déterminer les sous-espaces propres.

Préciser une matrice diagonale semblable à A.

3° Soit le système différentiel :

$$(S)\quad \begin{aligned} x' &= -y + z \\ y' &= x - z \\ z' &= -x + y \end{aligned}$$

où les inconnues sont des fonctions dérivables de la variable réelle t.

Déterminer la solution (x, y, z) de (S) telle que :

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 3 \quad \text{et} \quad z(0) = 0$$

On l'exprimera uniquement à l'aide de fonctions réelles.

4° Déterminer deux intégrales premières simples de (S).

Quelle remarque d'ordre géométrique peut-on en déduire?

QUATRIÈME EXERCICE

On définit trois applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, u, v, w par :

$$u(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt, \quad v(x) = u(x^2) \quad \text{et} \quad w(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2.$$

1° Former $u(x + h) - u(x)$. (On ne cherchera pas à calculer les intégrales.)

Montrer, en utilisant la formule de TAYLOR, que, pour tout $h \in [-1, 1]$ et tout $t \in [0, 1]$:

$$e^{-h(1+t^2)} = 1 - h(1 + t^2) + h^2\,\theta(t, h), \quad \text{avec} \mid \theta(t, h) \mid \leqslant 2e^2$$

2° En déduire que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $u'(x)$ sous la forme d'une intégrale.

3° Montrer que v et w sont dérivables.

Montrer que $v' + w' = 0$.

Calculer $v(0) + w(0)$.

4° Calculer $\lim_{x \to +\infty} v(x)$.

Justifier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Déduire de ce qui précède la valeur de I.

CINQUIÈME EXERCICE

La notation Log désigne le logarithme népérien (ou de base e).

On définit la série de fonctions de terme général u_n par les relations:

$$u_0(0) = 1, \quad u_n(0) = 0 \quad \text{pour } n \geqslant 1,$$

$$u_n(x) = \frac{(-x \operatorname{Log} x)^n}{n!} \quad \text{pour } x \in]0, 1] \text{ et } n \geqslant 0.$$

1° Étudier la convergence de cette série. Préciser sa somme.

2° Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout entier p, $0 \leqslant p \leqslant n$, calculer :

$$\int_0^1 x^n\,(\operatorname{Log} x)^p\,dx,$$

et en déduire la valeur de :

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx \quad \text{pour} \quad n \geqslant 0.$$

3° Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-k}$. Déterminer, en fonction de n, un majorant de R_n.

4° Déduire de ce qui précède une valeur approchée à 10^{-4} près de l'intégrale :

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx.$$

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail